САМАРСКИЙ ДВОРЕЦ ДЕТСКОГО И ЮНОШЕСКОГО ТВОРЧЕСТВА

САМАРСКАЯ ОБЛАСТНАЯ АСТРОНОМИЧЕСКАЯ ШКОЛА

РЕШЕНИЯ КОНКУРСНЫХ ЗАДАЧ ОЛИМПИАДЫ ПО АСТРОНОМИИ SAMRAS-2014 СРЕДИ УЧАЩИХСЯ 10-11 КЛАССОВ ЗАОЧНОГО ТУРА № 1

Задачи подготовил:

Филиппов Юрий Петрович,
научный руководитель школы,
старший преподаватель кафедры
общей и теоретической физики
Самарского государственного
университета, к.ф.-м.н.

Самара, 2013 г.

Уровень «Новичок» (уровень А)

Задача № 1. «Третья по яркости звезда небосвода»

Условие. Как называется третья по яркости (не считая Солнца) звезда небосвода. В каком созвездии она находится? Можно ли ее наблюдать в течение года в г. Самара? (3 балла).

Решение:

Как известно, третьей по яркости звездой небосвода является ***Толиман*** – звезда южного полушария, ярчайшая в созвездии Центавра, с видимым блеском -0.27^m (уступает в блеске только Сириусу и Канопусу, не считая Солнца).

В городе Самара видны только те звезды, склонение которых $\delta > \varphi_{samara} - 90^\circ = 53^\circ 12' - 90^\circ = -36^\circ 48'$. Однако склонение звезды $\delta_* = -60^\circ 50'$. Следовательно, данную звезду невозможно наблюдать в принципе в г. Самара. В этом же факте можно убедиться, используя подвижную карту звездного неба.

Ответ: Толиман, созвездие Центавра; данную звезду невозможно наблюдать в принципе в г. Самара. ($\$_{\max} = 3$ балла).

Задача № 2. «Карусель из тел Солнечной системы»

Условие. На приведенном ниже рис. 1 представлены тела Солнечной системы. Определите эти тела. Укажите также их порядковый номер (начиная с "1") в порядке их удаленности от центра Солнечной системы. (на копии этой картинки подпишите названия этих тел и укажите рядом номера). ($0\% \div 20\%$ правильных ответов – 1 балл, $20\% \div 40\%$ – 2 балла, $40\% \div 60\%$ – 3 балла, $60\% \div 90\%$ – 4 балла, $90\% \div 100\%$ – 5 баллов).

Решение:

На данном рисунке представлены (1) Солнце, (2) Меркурий, (3) Венера, (4) Земля, (5) Марс, (6) Юпитер, (7) Сатурн, (8) Уран, (9) Нептун, (10) Плутон (см. рис. 2). ($0\% \div 20\%$ правильных ответов – 1 балл, $20\% \div 40\%$ – 2 балла, $40\% \div 60\%$ – 3 балла, $60\% \div 90\%$ – 4 балла, $90\% \div 100\%$ – 5 баллов).

Задача № 3. «Горизонтальный параллакс Нептуна»

Вычислите горизонтальный параллакс Нептуна в противостоянии, если известно, что его гелиоцентрическое расстояние в этот момент равно 30 а.е.? Горизонтальный параллакс Солнца равен $8.8''$. (3 балла).

Дано:
$r_{♆} = 30$ а.е., $p_0^{(\oplus)} = 8.8''$,
Найти: $p_0^{(♆)}$-?

Решение:

Согласно определению, ***горизонтальным экваториальным параллаксом*** небесного тела называется угол, под которым с этого тела виден средний экваториальный радиус Земли ($\bar{R}_{\oplus}^{(eq)}$), при условии, что угол между радиусом и лучом зрения составляет 90°. Данный параметр представляется в виде:

$$\sin p_0 = \frac{\bar{R}_{\oplus}^{(eq)}}{\Delta}, \text{ при } p_0 \ll 1, \ \Rightarrow \ p_0 = \frac{\bar{R}_{\oplus}^{(eq)}}{\Delta}, \tag{1}$$

здесь Δ – расстояние от данного тела до центра Земли.

Применим результат (1) для определения горизонтального параллакса Солнца и Нептуна:

$$p_0^{(\oplus)} = \frac{\bar{R}_{\oplus}^{(eq)}}{a_{\oplus}}, \ p_0^{(♆)} = \frac{\bar{R}_{\oplus}^{(eq)}}{r_{♆} - a_{\oplus}}, \ \Rightarrow \ p_0^{(♆)} = p_0^{(\oplus)} \left(\frac{a_{\oplus}}{(r_{♆} - a_{\oplus})} \right) = 8.8'' \cdot \frac{1}{29} = 0.3'', \tag{2}$$

Рис. 1.

здесь $a_\oplus = 1$ а.е. – среднее расстояние Земли от Солнца.

Ответ: $p_0^{(♇)} = p_0^{(\oplus)} a_\oplus / (r_{♇} - a_\oplus) = 0.3''$. ($\$_{\max} = 3$ балла).

Задача № 4. «Хронологическая последовательность событий»

Условие. В один и тот же день были зарегистрированы следующие события (время – всемирное):

A. Падение метеорита на Дальнем востоке в 3 час 20 мин;

B. Вспышка в одном из кратеров Луны в 3 час 18 мин;

C. Хромосферная вспышка на Солнце в 3 ч час 27 мин;

D. Начало извержения вулкана на поверхности Ио – спутника Юпитера в 3 ч 37 мин (Юпитер в противостоянии);

E. Вспышка новой звезды в Большом Магеллановом облаке в 4 ч 45 мин.

Что можно сказать о последовательности этих событий во времени? (4 балла).

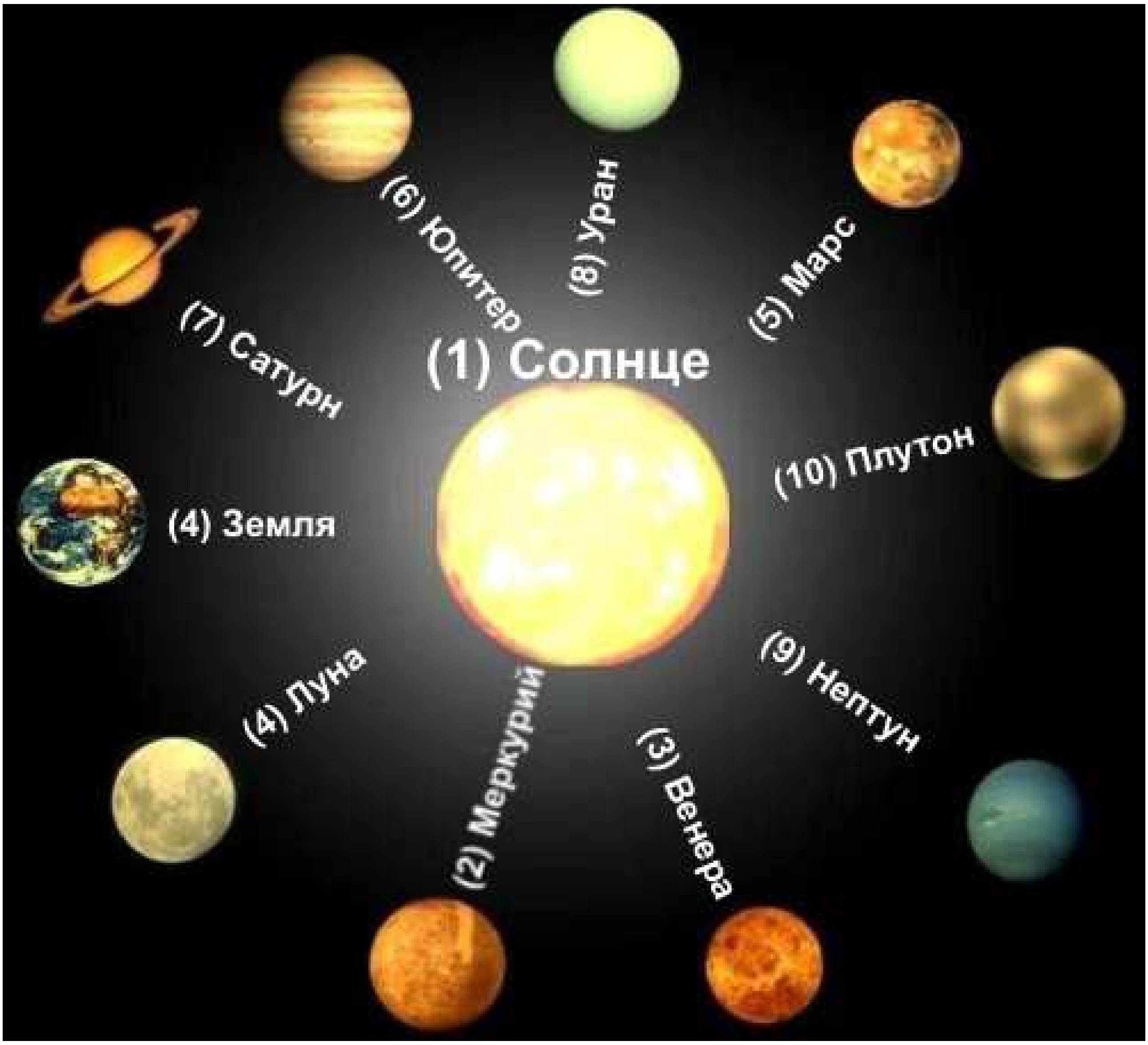

Рис. 2.

Решение:

Как известно, свет распространяется в пространстве с конечной скоростью $c = 3 \cdot 10^5$ км/с. Именно поэтому объекты космоса мы видим такими, какими они были в прошлом – от нескольких секунд до миллиардов лет тому назад. ***Т.о. современная астрономия имеет в своем арсенале уникальный инструмент для изучения космоса – своеобразную "природную машину времени".*** Истинное время свершения (T) какого-либо события по нашим часам определяется расстоянием до этого тела r, скоростью c, и моментом времени фиксации данного события земным наблюдателем T_0:

$$T = T_0 - \frac{r}{c}.$$

Очевидно, что чем больше расстояние r, тем дальше отстоит в прошлом момент T от момента T_0. В случае (A) событие происходит на Земле, в этом случае $T = T_0 = 3$ час 20 мин.

В случае (B) событие происходит на Луне, отстоящей на расстоянии $r_{☾} = 3.84 \cdot 10^5$ км, от которой свет идет за время 1.3 сек. Следовательно, можно полагать, что $T \approx T_0 = 3$ час 18 мин.

В случае (C) событие происходит на Солнце, на расстоянии $r_{\odot} = 1.496 \cdot 10^8$ км, от которого свет идет 8 мин 19 сек. Следовательно, момент $T \approx 3$ час 19 мин.

В случае (D) событие происходит в окрестности Юпитера. Юпитер в противостоянии не может подойти к Земле ближе чем на 589 424 тыс. км (см. об этом, например, Wikipedia, "Юпитер"), при этом время распространения света 32 мин 45 сек. Тогда момент $T = 3$ час 03 мин.

В случае (E), событие происходит в карликовой галактике, расположенной по соседству с нашей Галактикой – Млечный путь. Расстояние до Большого Магелланового облака (БМО) составляет 163 тыс. св. лет. Следовательно $T = -163$ тыс. лет, т.е. 163 тыс. лет назад на самом деле вспыхнула новая в БМО.

Т.о. хронологическая последовательность событий такова: (E), (D), (B), (C), (A).

Ответ: хронологическая последовательность событий такова: (E), (D), (B), (C), (A). ($\$_{\max} =$ 4 балла).

Задача № 5. «"Запаздывание" океанских приливов»

Условие. Как известно, океанские приливы каждые последующие сутки наступают примерно на 50 минут позже предыдущих. Почему? (4 балла).

Решение:

Образование приливных волн в мировом океане Земли обусловлено неоднородным гравитационным полем Солнца и Луны и конечностью размеров Земли. Причем, в силу относительной близости, именно Луна играет доминирующую роль в образовании приливов. Изменение их положения по отношению к Земле приводит к движению приливной волны по поверхности Земли (последняя движется синхронно с приливообразующим телом).

Следовательно, период обращения одного горба (на самом деле их два) главной приливной волны должен быть равен соответствующему синодическому периоду обращения $S_{☾}$ приливообразующего тела – Луны. Для определения $S_{☾}$ воспользуемся уравнением синодического движения:

$$\frac{1}{S_{☾}} = \frac{1}{T_\oplus} - \frac{1}{T_{☾}}, \;\Rightarrow\; S_{☾} = \frac{T_\oplus T_{☾}}{T_{☾} - T_\oplus} = 1.035\,\text{сут} = 24\,\text{ч}\;50\,\text{мин}, \tag{3}$$

где $T_\oplus = 23$ч 56 мин – сидерический период вращения Земли относительно своей оси, $T_{☾} =$ 27.32 сут – сидерический период обращения Луны относительно Земли.

Продолжительность земных суток составляет 24 часа. Тогда $S_{☾}$ – 24 часа = 50 мин есть тот интервал времени, на который "опаздывает" горб приливной волны Луны каждые последующие сутки. ($\$_{\max} = 4$ балла).

Задача № 6. «О движении по эллипсу и средней скорости»

Условие. При движении тела Солнечной системы по эллипсу относительно Солнца его скорость максимальна в перигелии и минимальна в афелии. В какой точке траектории скорость тела равна ее среднему значению V_a? (5 баллов).

Решение:

При движении тела по эллипсу его расстояние (гелиоцентрическое) от Солнца меняется от q (перигелийное расстояние) до Q (афелийное расстояние), при этом среднее расстояние от Солнца равно a – большой полуоси эллипса (см. рис. 3). Под ***средней скоростью тела*** понимается скорость того же тела, движущегося по круговой орбите вокруг Солнца с радиусом, равным большой полуоси эллипса a. Согласно второму закону Ньютона имеем:

$$m\frac{V^2}{a} = \frac{G\,m\,\mathfrak{M}_\odot}{a^2}, \;\Rightarrow\; V_a = \sqrt{\frac{G\,\mathfrak{M}_\odot}{a}}. \tag{4}$$

Применим закон сохранения энергии к двум точкам траектории: произвольной точке P и перигелию П (см. рис. 3):

$$\frac{m\,V^2}{2} - \frac{G\,m\,\mathfrak{M}_\odot}{r} = \frac{m\,V_q^2}{2} - \frac{G\,m\,\mathfrak{M}_\odot}{q}, \;\Rightarrow\; V^2 = V_q^2 - 2G\,\mathfrak{M}_\odot\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}\right). \tag{5}$$

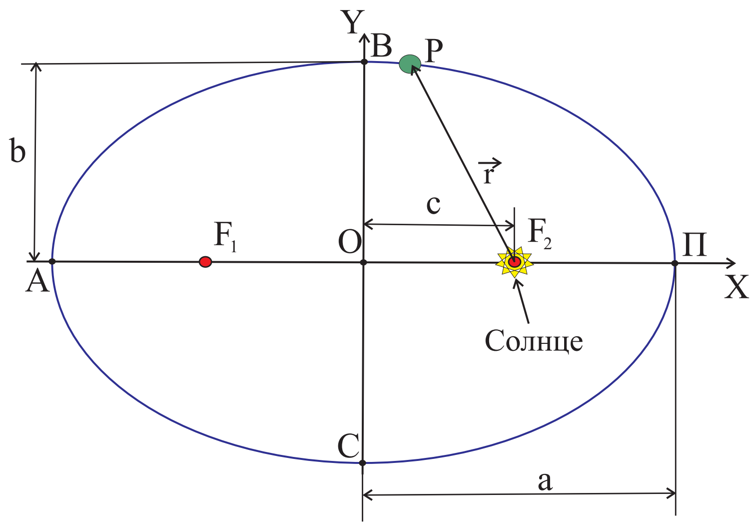

Рис. 3. К определению основных точек и параметров эллипса.

Скорость тела в перигелии V_q и расстояние q можно представить как

$$V_q = \sqrt{\frac{G\mathfrak{M}_\odot}{a}\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}, \quad q = a(1-\varepsilon). \quad (6)$$

тогда уравнение (5) можно представить в виде:

$$V^2 = \frac{G\mathfrak{M}_\odot}{a}\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} - 2G\mathfrak{M}_\odot \times \times \left(\frac{1}{a(1-\varepsilon)} - \frac{1}{r}\right) = G\mathfrak{M}_\odot\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) (7)$$

Т.о. имеем

$$V^2 = V_a^2\left(\frac{2a}{r} - 1\right). \quad (8)$$

Из последнего выражения следует, что при $r = a$, $V = V_a$. Гелиоцентрическому расстоянию $r = a$ (согласно свойствам эллипса $a^2 = b^2 + c^2$) отвечают точки B и C (точки пересечения эллипса с осью OY канонической декартовой системы координат) эллипса.

Ответ: скорость тела $V = V_a$ в точках B и C (точки пересечения эллипса с осью OY канонической декартовой системы координат). ($\$_{\max} = 5$ баллов).

Уровень «Знаток» (уровень B)

Задача № 7. «Двойной большой крест 1999 года»

Условие. 18 августа 1999 большинство планет Солнечной системы по отношению к Земле сформировали редкую конфигурацию, названную впоследствии "Двойным большим крестом 1999 года". Конфигурация такова: Уран находился в противостоянии, Юпитер и Сатурн вблизи своих западных квадратур, Марс – вблизи своей восточной квадратуры (рядом с ним располагалась Луна), Меркурий и Венера – вблизи своих нижних соединений. Постройте рисунок, адекватный данной конфигурации. Используя предположение о круговых орбитах планет и значения больших полуосей их орбит (возьмите эти данные из справочника), оцените геоцентрические расстояния до указанных выше тел в этой конфигурации. (6 баллов).

Решение:

Схема, адекватная данной конфигурации, представлена на рис. 4. Согласно рисунку геоцентрические расстояния до нижних планет есть

$$\Delta_i = a_\oplus - a_i, \ \ i = ☿, ♀.$$

здесь $a_\oplus = 1.000$ а.е. – большая полуось орбиты Земли, $a_{☿} = 0.39$ а.е. – большая полуось Меркурия, $a_{♀} = 0.72$ а.е. – большая полуось Венеры. В результате геоцентрические расстояния до указанных планет есть $\Delta_{☿} = 0.61$ а.е., $\Delta_{☿} = 0.28$ а.е.

Верхняя планета, находящаяся в одной из квадратур, образует вместе с Землей и Солнцем прямоугольный треугольник, для которого, согласно теореме Пифагора, имеем

$$\Delta_i = \sqrt{a_i^2 - a_\oplus^2}, \ \ i = ♂, ♃, ♄.$$

Согласно справочным данным большая полуось орбиты Марса есть $a_{♂} = 1.52$ а.е., Юпитера – $a_{♃} = 5.20$ а.е., Сатурна – $a_{♄} = 9.58$ а.е. Тогда геоцентрические расстояния для данных планет

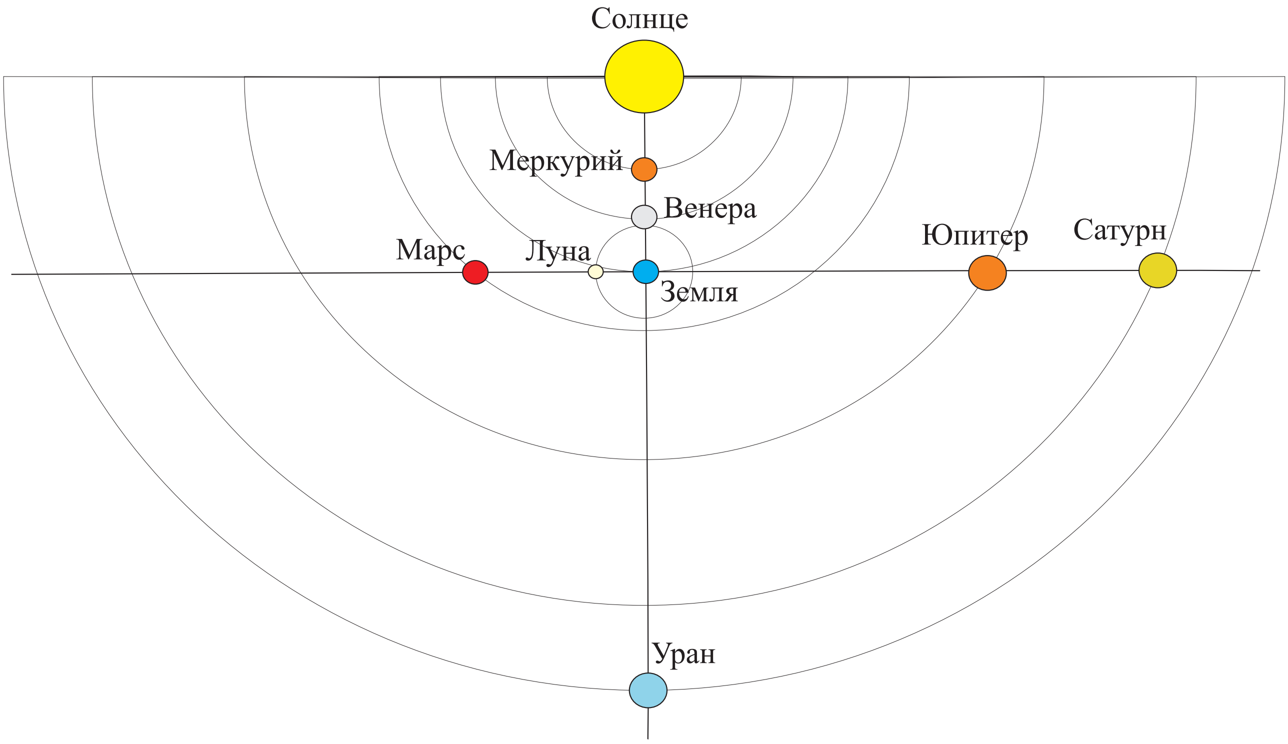

Рис. 4. К определению конфигурации планет "Двойной большой крест 1999 года".

представляются в виде: для Марса – $\Delta_{♂} = 1.14$ а.е., Юпитера – $\Delta_{♃} = 5.10$ а.е., Сатурна – $\Delta_{♄} = 9.53$ а.е.

Верхняя планета, находящаяся в противостоянии, отстоит от Земли на расстоянии:

$$\Delta_i = a_i - a_{\oplus}, \quad i = ♅.$$

Для Урана имеем по аналогии с предыдущими случаями: $a_{♅} = 19.23$ а.е., $\Delta_{♅} = 18.23$ а.е.

Наконец, Луна находится на расстоянии $a_{☾} = \Delta_{☾} = 384.4$ тыс. км.

Ответ: $\Delta_{☿} = 0.61$ а.е. (Меркурий), $\Delta_{♀} = 0.28$ а.е. (Венера), $\Delta_{♂} = 1.14$ а.е. (Марс), $\Delta_{♃} = 5.10$ а.е. (Юпитер), $\Delta_{♄} = 9.53$ а.е. (Сатурна), $\Delta_{♅} = 18.23$ а.е. (Уран), $\Delta_{☾} = 384.4$ тыс. км (Луна). ($\$_{\max} = 6$ баллов).

Задача № 8. «Вспышка Новой Дельфина 2013»

Условие. В ночь с 14 на 15 августа 2013 года (будем полагать далее в момент $UT_1 = 00^h00^m$ по всемирному времени) японским астрономом-любителем Коити Итагаки с помощью 60-сантиметрового рефлектора и ПЗС-камеры была обнаружена новая звезда (с $m_1 = 6.8^m$) в созвездии Дельфина – Новая Дельфина 2013 (Nova Delphini 2013). Известно, что за сутки до обнаружения звезда имела блеск $m_0 = 17.1^m$. Блеск звезды достиг максимума ($m_2 = 4.3^m$) 16 августа в момент $UT_2 = 12^h00^m$, после чего стал медленно уменьшаться со скоростью примерно $v_m = 0.17^m$/сут. Опираясь на данные наблюдений, вычислите 1) амплитуду изменения блеска звезды, 2) отношение светимостей звезды до и в максимуме вспышки, 3) время (и дату этого момента) от момента максимума блеска, через которое блеск звезды достигнет первоначального значения, если полагать, что скорость падения блеска остается неизменной с течением времени. (7 баллов).

Дано:	***Решение:***
$UT_0 = 00^h00^m$ (14.08.2013), $m_0 = 17.1^m$, $UT_1 = 00^h00^m$ (15.08.2013), $m_1 = 6.8^m$, $UT_2 = 12^h00^m$ (16.08.2013), $m_2 = 4.3^m$, $v_m = 0.17^m$/сут.	
Найти: Δm – ? $L_{\max}/L_{\min}$ – ? t_f, T_f – ?	

Согласно определению, ***амплитудой изменения блеска*** (Δm) звезды называется разность звездных величин в эпохи минимума ($m_{\min} = m_0$) и максимума блеска ($m_{\max} = m_2$):

$$\Delta m = m_{\min} - m_{\max} = m_0 - m_2 = 12.8^m.$$

Воспользуемся формулой Погсона для светимостей:

$$\lg\left(\frac{L_{\max}}{L_{\min}}\right) = -0.4\left(M_{\max} - M_{\min}\right), \;\Rightarrow\; \frac{L_{\max}}{L_{\min}} = 10^{-0.4(M_{\max}-M_{\min})} \quad (9)$$

и формулой, связывающей абсолютную видимую звездную величину:

$$M_{\{\max,\min\}} = m_{\{\max,\min\}} + 5 - 5\lg r. \quad (10)$$

Из результатов (9) и (10) следует, что

$$\frac{L_{\max}}{L_{\min}} = 10^{-0.4(m_{\max}-m_{\min})} = 10^{0.4\,\Delta m} = 1.32\cdot 10^5. \quad (11)$$

Согласно условию задачи, звездная величина после эпохи максимума увеличивалась с постоянной скоростью v_m, тогда закон изменения звездной величины можно представить в виде:

$$m(t) = m_2 + v_m\,t. \quad (12)$$

Спустя время t_f, звездная величина становится равна m_0. В результате мы получаем линейное уравнение относительно t_f:

$$m_0 = m_2 + v_m\,t_f, \;\Rightarrow\; t_f = \frac{m_0 - m_2}{v_m} = \frac{\Delta m}{v_m} = 75.3\,\text{сут.}$$

этот интервал времени отвечает 19 часам 31 октября 2013 года.

Ответ: $\Delta m = m_{\min} - m_{\max} = m_0 - m_2 = 12.8^m$; $L_{\max}/L_{\min} = 10^{0.4\,\Delta m} = 1.32\cdot 10^5$, $t_f = \Delta m/v_m = 75.3$ сут, дата – 31 октября 2013 года, 19 часов. ($\$_{\max} = 7$ баллов).

Задача № 9. «Кривая блеска Новой Дельфина 2013»

Условие. Опираясь на результаты предыдущей задачи, постройте кривую блеска Nova Delphini 2013 (рекомендуется все участки кривой между экспериментальными точками аппроксимировать прямыми отрезками). Зная расстояние до данной звезды (по двум независимым экспериментам оно оценено значениями $r_1 = 11400$ и $r_2 = 17900$ св. лет) определите абсолютную звездную величину и светимость (в светимостях Солнца) звезды до и в максимуме вспышки (для каждого значения r_i). (8 баллов).

Решение:

Кривая блеска Nova Delphini 2013 построенная по данным наблюдений, представленным в предыдущей задаче, показана на рис. 5. Для определения абсолютной звездной величины воспользуемся формулой (10):

$$M^{(i)}_{\{\max,\min\}} = m_{\{\max,\min\}} + 5 - 5\lg r_i, \;\text{ где }\; i = 1, 2. \quad (13)$$

Здесь r должно быть выражено в пк. После расчетов получаем $M^{(1)}_{\max} = -8.4^m$, $M^{(2)}_{\max} = -9.4^m$, $M^{(1)}_{\min} = 4.4^m$, $M^{(2)}_{\min} = 3.4^m$. Светимость можно определить, используя формулу Погсона (9):

$$L^{(i)}_{\{\max,\min\}} = L_\odot\,10^{-0.4\left(M^{(i)}_{\{\max,\min\}} - M_\odot\right)}, \;\text{ где }\; i = 1, 2. \quad (14)$$

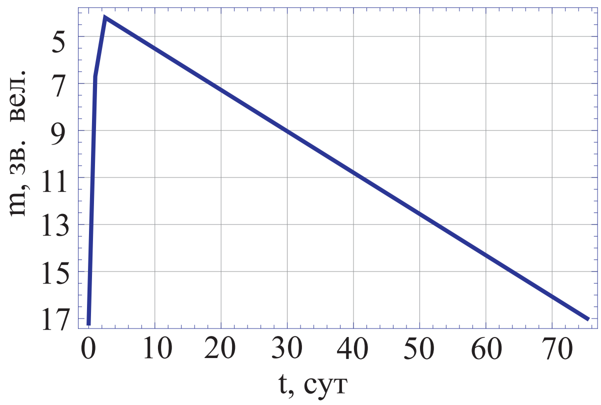

Рис. 5. Кривая блеска Новой Дельфина 2013, построенная по данным наблюдений.

в итоге $L^{(1)}_{\max} = 1.87 \cdot 10^5 \cdot L_\odot$, $L^{(2)}_{\max} = 4.69 \cdot 10^5 \cdot L_\odot$, $L^{(1)}_{\min} = 1.42 \cdot L_\odot$, $L^{(2)}_{\min} = 3.56 \cdot L_\odot$. Здесь учтено, что $M_\odot = 4.78^m$ – абсолютная звездная величина Солнца, $L_\odot = 3.846 \cdot 10^{26}$ Вт – его светимость.

Ответ: $M^{(1)}_{\max} = -8.4^m$, $M^{(2)}_{\max} = -9.4^m$, $M^{(1)}_{\min} = 4.4^m$, $M^{(2)}_{\min} = 3.4^m$, $L^{(1)}_{\max} = 1.87 \cdot 10^5 \cdot L_\odot$, $L^{(2)}_{\max} = 4.69 \cdot 10^5 \cdot L_\odot$, $L^{(1)}_{\min} = 1.42 \cdot L_\odot$, $L^{(2)}_{\min} = 3.56 \cdot L_\odot$. ($\$_{\max} = 8$ баллов).

Задача № 10. «О движении Солнца по эклиптике»

Условие. Высокоточные наблюдения за движением Солнца в течение года позволяют сделать вывод, что по эклиптике движется не само Солнце, а некоторая точка, относительно которой Солнце совершает колебания с амплитудой $\delta\varphi = 6.5''$ и периодом $T = 27.32$ средних солнечных суток. Какова причина этих колебаний? Как, используя это явление, определить массу Луны? (8 баллов).

Дано:
$\delta\varphi = 6.5''$,
$T = 27.32$ сут.,

Найти:
Какова причина – ?
$\mathfrak{M}_\odot$ – ?

Решение:

Годовое движение Солнца отражает годовое движение Земли относительно Солнца. Колебания Солнца относительно эклиптики означают, что Земля совершает колебания относительно точки на своей орбите с той же амплитудой.

При этом линейное расстояние, соответствующее данной амплитуде:

$$r_\oplus = \frac{6.5''}{206265''} \cdot 1.496 \cdot 10^8 \text{ км} = 4714 \text{ км}. \tag{15}$$

Эта точка есть центр массы системы "Земля-Луна", а $r_\oplus$ – расстояние от центра масс до центра Земли. Из определения радиуса-вектора центра масс следует, что отношение масс Земли и Луны должно быть равно обратному отношению их расстояний до центра масс, т.е.

$$\frac{\mathfrak{M}_☾}{\mathfrak{M}_\oplus} = \frac{r_\oplus}{r_☾} = \frac{r_\oplus}{a_☾ - r_\oplus} = 0.0124 \approx \frac{1}{81}. \tag{16}$$

здесь $a_☾ = 384399$ км – большая полуось лунной орбиты. Т.о., масса Луны в 81 раз меньше массы Земли.

Ответ: Колебания Солнца относительно эклиптики обусловлены движением Земли относительно центра масс системы "Земля-Луна". $\mathfrak{M}_☾ / \mathfrak{M}_\oplus = 1/81$. ($\$_{\max} = 8$ баллов).

Задача № 11. «Ночной дайвинг и Вега»

Условие. Дайвер решил выполнить ночное погружение в воду, вдали от берега. В момент погружения звезда Вега оказалась точно в зените. Дайвер обнаружил, что, начиная с некоторой глубины $h_{\max}$, звезда перестает быть видимой. Определите широту места погружения дайвера. Оцените также глубину $h_{\max}$, учитывая феномен отражение света от поверхности воды (показатель преломления воды $n = 4/3$) и полагая, что его поглощение водой описывается законом Бугера-Ламберта ($\kappa = 2.4$ м$^{-1}$ – бугеровский коэффициент поглощения света водой). Склонение Веги $\delta_V = +38°47'$, а видимая звездная величина $m_V = 0.03^m$. (9 баллов).

Дано:	**Решение:**
$n = 4/3$, $\kappa = 2.4\ \text{м}^{-1}$; $\delta_V = +38°47'$, $m_V = 0.03^m$.	Воспользуемся формулой для высоты светила в верхней кульминации: $$h_{\max} = 90° - \varphi + \delta. \quad (17)$$ Поскольку Вега находится в зените, то $h_{\max} = 90°$, тогда $\varphi = \delta = +38°47'$.
Найти: φ – ? $h_{\max}$ – ?	Пусть интенсивность света, пришедшего от Веги и упавшего нормально на поверхность воды есть $\mathcal{I}_0$. Часть света отразится от поверхности воды и его интенсивность будет $\mathcal{I}_{\text{ref}}$. Оставшаяся часть света (его интенсивность $\mathcal{I}^{(0)}_{\text{int}}$)

пройдет через границу "воздух-вода" не преломляясь (свет падает на воду нормально). Следовательно, можно записать:

$$\mathcal{I}_0 = \mathcal{I}_{\text{ref}} + \mathcal{I}^{(0)}_{\text{int}}. \tag{18}$$

Интенсивность отраженного света $\mathcal{I}_{\text{ref}}$ можно связать с интенсивностью $\mathcal{I}_0$ с помощью коэффициента отражения ρ посредством выражения:

$$\frac{\mathcal{I}_{\text{ref}}}{\mathcal{I}_0} = \rho. \tag{19}$$

В случае нормального падения света, последний параметр может быть представлен выражением (см., например, ресурс `http://physics.nad.ru/Physics/Cyrillic/rays_txt.htm`):

$$\rho = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 = \left(\frac{1}{7}\right)^2 = 0.02. \tag{20}$$

Интенсивность прошедшего света, по мере его распространения в воде, уменьшается согласно закону Бугера-Ламберта:

$$\mathcal{I}_{\text{int}} = \mathcal{I}^{(0)}_{\text{int}}\, e^{-\kappa\,\ell}. \tag{21}$$

здесь ℓ – путь, пройденный светом в воде. Дайвер с нормальным зрением перестает видеть звезду на глубине $h_{\max}$, если ее видимая звездная величина $m_{\max} \geq 6^m$. Согласно формуле Погсона имеем

$$\frac{\mathcal{I}_{\text{int}}}{\mathcal{I}_0} = 10^{-0.4(m_{\max} - m_V)}, \text{ иначе } \frac{\mathcal{I}_{\text{int}}}{\mathcal{I}_0} = (1-\rho)e^{-\kappa\, h_{\max}}. \tag{22}$$

В итоге имеем уравнение

$$10^{-0.4(m_{\max} - m_V)} = (1-\rho)e^{-\kappa\, h_{\max}}, \ \Rightarrow \ -0.4(m_{\max} - m_V) = -\kappa\, h_{\max} \lg e + \lg(1-\rho), \ \Rightarrow$$

$$h_{\max} = \frac{0.4(m_{\max} - m_V) + \lg(1-\rho)}{\kappa \lg e} = \frac{0.4(6.00 - 0.03) + \lg(1 - 0.02)}{2.4 \lg e} = 2.28\,\text{м} \approx 2.3\,\text{м}. \tag{23}$$

Ответ: $\varphi = +38°47'$, $h_{\max} = (0.4(m_{\max} - m_V) + \lg(1-\rho))/(\kappa \lg e) \approx 2.3\,\text{м}$. ($\$_{\max} = 9$ баллов).

Задача № 12. «Проблема глобального лунного телевидения»

Условие. Докажите, что у Луны не может быть стационарного спутника и, следовательно, глобальное лунное телевидение необходимо осуществлять иными способами, чем спутниковое телевидение на Земле. (10 баллов).

Решение:

Вычислим селеноцентрическое расстояние до стационарного спутника Луны, предположив, что таковой возможен. Применяя третий закон Кеплера (уточненный), запишем:

$$\frac{(\mathfrak{M}_{☾} + m)}{(\mathfrak{M}_{\oplus} + \mathfrak{M}_{☾})} = \left(\frac{a_s}{a_{☾}}\right)^3 \left(\frac{T_{☾}}{T_s}\right)^2, \ \Rightarrow \ a_s \approx a_{☾} \left(\frac{\mathfrak{M}_{☾}}{\mathfrak{M}_{\oplus}}\right)^{1/3} = 88842\,\text{км}. \tag{24}$$

где мы учли, что $m \ll \mathfrak{M}_{\leftmoon} \ll \mathfrak{M}_{\oplus}$, $T_s = T_{\leftmoon} = P_{\leftmoon}$ – как известно, период обращения Луны вокруг собственной оси $P_{\leftmoon}$ равен сидерическому лунному месяцу $T_{\leftmoon}$ (синхронное вращение Луны).

Третье тело, которое может нарушить устойчивость системы "спутник-Луна" – это Земля. Запишем ускорения, которые сообщают Луна спутнику и Земля спутнику и Луне:

$$W_s^{(\leftmoon)} = \frac{G\,\mathfrak{M}_{\leftmoon}}{a_s^2}, \;\; W_s^{(\oplus)} = \frac{G\,\mathfrak{M}_{\oplus}}{(a_{\leftmoon} - a_s)^2}, \;\; W_{\leftmoon}^{(\oplus)} = \frac{G\,\mathfrak{M}_{\oplus}}{a_{\leftmoon}^2}. \tag{25}$$

Из-за действия Земли на Луну и спутник, последний приобретает относительно Луны приливное ускорение, направленное от Луны:

$$W_{\mathrm{tid}} = W_s^{(\oplus)} - W_{\leftmoon}^{(\oplus)} = \frac{G\,\mathfrak{M}_{\oplus}}{(a_{\leftmoon} - a_s)^2} - \frac{G\,\mathfrak{M}_{\oplus}}{a_{\leftmoon}^2} = \frac{G\,\mathfrak{M}_{\oplus}}{a_{\leftmoon}^2}\left(\frac{a_{\leftmoon}^2}{(a_{\leftmoon} - a_s)^2} - 1\right). \tag{26}$$

Движение спутника по селеноцентрической орбите будет стабильным, если $W_{\mathrm{tid}}/W_s^{(\leftmoon)} \ll 1$. Определим отношение $W_{\mathrm{tid}}/W_s^{(\leftmoon)}$:

$$\frac{W_{\mathrm{tid}}}{W_s^{(\leftmoon)}} = \frac{\mathfrak{M}_{\oplus}}{\mathfrak{M}_{\leftmoon}}\left(\frac{a_s^2}{(a_{\leftmoon} - a_s)^2} - \frac{a_s^2}{a_{\leftmoon}^2}\right) = 81\,(0.09 - 0.05) \approx 3. \tag{27}$$

Условие стабильного характера движения спутника на селеноцентрической орбите не выполняется, следовательно, у Луны не может быть стационарного спутника. ($\$_{\max} = 10$ баллов).

Уровень «Профи» (уровень C)

Задача № 13. «Галактика M100 и ее свойства»

Условие. На рис. 6 представлена фотография галактики M100. Используя ее, определите морфологический тип галактики по классификации Э. Хаббла. Полагая, что галактика на фотографии расположена "плашмя", определите линейные размеры галактики, если известно, что расстояние до галактики $r = 55$ млн. св. лет, а ее угловые размеры составляют $7.4' \times 6.3'$. Оцените угловую площадь небосвода, которую покрывает данная галактика (в квадратных градусах), учитывая что форма ее видимой границы близка к форме эллипса. Определите радиальную скорость удаления галактики. (11 баллов).

Дано:
$r = 55$ млн. св. лет,
$a'' \times b'' = 7.4' \times 6.3'$;

Найти:
морф. тип – ?
$a \times b$ – ?
S – ?
V_r – ?

Решение:

Для определения морфологического типа по классификации Э. Хаббла, необходимо сравнить образ данной галактики с образами характерных представителей различных типов и выявить наиболее характерные черты. Очевидно, что эта галактика имеет спиральную структуру, т.е. тип галактики – S.

Видно, что центральная часть галактики (балдж) вытянута и напоминает перемычку (бар) и все же нечетко сформированную, поэтому можно полагать, что это спиральная без бара (по более точной классификации де Вокулера – это галактика занимает промежуточное положение SAB). У галактики балдж средних размеров и клочковатая спиральная структура, с неплотно уложенными ветвями. Эти свойства больше подходят галактикам b- и c-подтипа, т.о. окончательно имеем Sbc (по более точной классификации де Вокулера – SAB(s)bc).

Для определения линейных размеров галактики $a \times b$ учтем, что

$$a = r \cdot \frac{a''}{206265''} = 5.5 \cdot 10^7 \text{ св.лет} \times \frac{7.4 \times 60''}{206265''} = 1.18 \cdot 10^5 \text{ св.лет},$$

$$b = r \cdot \frac{b''}{206265''} = 5.5 \cdot 10^7 \text{ св.лет} \times \frac{6.3 \times 60''}{206265''} = 1.01 \cdot 10^5 \text{ св.лет}.$$

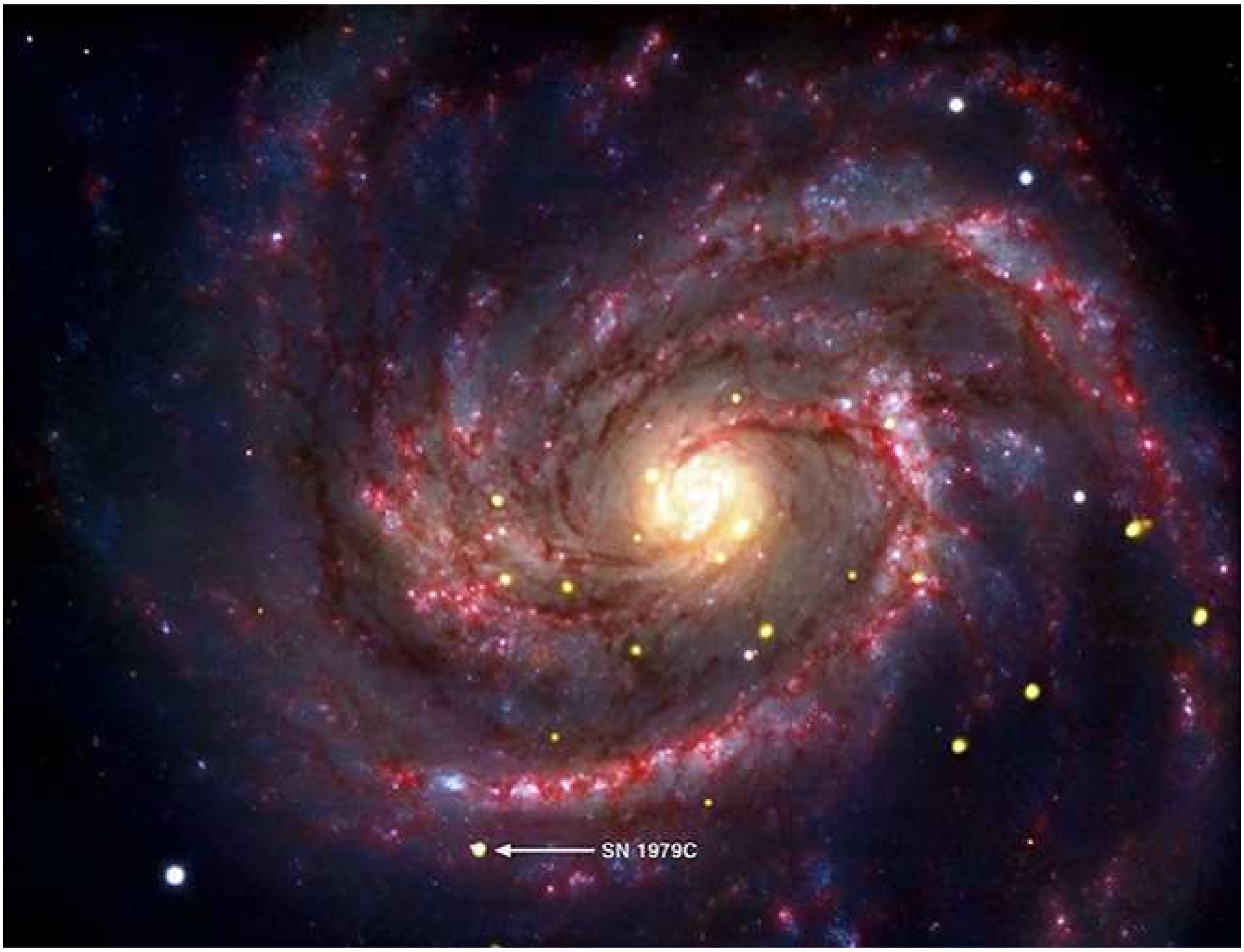

Рис. 6. Галактика M100 (NGC 4321) и сверхновая SN1979C.

Т.о. $a \times b = (1.18 \times 1.01) \cdot 10^5$ св. лет. Поскольку галактика занимает небольшую область на небосводе, то ее угловую площадь можно оценить по формуле площади эллипса:

$$S = \pi\,(a'' \times b'') = \pi(0.123 \times 0.105) = 0.04\,\text{град}^2.$$

Радиальную скорость удаления галактики можно вычислить, используя закон Хаббла:

$$V_r = H \cdot r = 67.80\,\text{км}/(\text{Мпк}\cdot\text{с}) \times 16.87\,\text{Мпк} = 1144\,\text{км/с}. \tag{28}$$

Отметим, что согласно данным измерений $V_r = 1571 \pm 1$ км/с. Столь существенное расхождение оценочного результата и данных наблюдений можно объяснить относительной близостью галактики. На столь небольших межгалактических расстояниях закон Хаббла не всегда дает адекватный результат.

Ответ: тип галактики – Sbc; $a \times b = (1.18 \times 1.01) \cdot 10^5$ св. лет, $S = \pi\,(a'' \times b'') = 0.04\,\text{град}^2$, $V_r = H \cdot r = 1144\,\text{км/с}$. ($\$_{\max} = 11$ баллов).

Задача № 14. «О сближении летящей звезды Барнарда и Солнца»

Условие. Как известно "Летящая звезда Барнарда" обладает самым большим *собственным движением* (угловой скоростью перемещения по небесной сфере) среди известных звезд ($\mu = 10.358''$ в год) и в настоящее время сближается с Солнцем. Определите момент времени, когда эта звезда пройдет на минимальном расстоянии от Солнца, если известно настоящее расстояние до звезды (5.96 св. лет) и ее радиальная (лучевая) скорость (-106.8 км/с). Вычислите для этого момента ее тангенциальную и лучевую скорость, собственное движение, параллакс, расстояние (в св. г), видимую звездную величину (ее сегодняшнее значение – $m_V = 9.57^m$). Определите, будет ли видна звезда невооруженным глазом. (12 баллов).

Дано:

$\mu = 10.358''$/год,
$V_r = -106.8$ км/с,
$r = 5.96$ св. лет,
$m_V = 9.57^m$.

Найти:

t_0 – ?
V'_τ, V'_r, μ' – ?
π', r', m'_V – ?
Будет ли видна глазом?

Решение:

Участок траектории движения звезды Барнарда в силу малости гравитационного взаимодействия с соседними звездами (в том числе и Солнцем), согласно первому закону Ньютона есть прямая B_1B_2. Сегодня данная звезда находится в точке B_1 (см. рис. 7). На минимальное расстояние звезда подойдет к Солнцу в точке B_2. Момент времени прохождения данной точки, отсчитываемого от настоящего момента есть

$$t_0 = \frac{s}{V}.$$

Из рис. 7 очевидно, что

$$V = \sqrt{V_\tau^2 + V_r^2}, \tag{29}$$

в свою очередь тангенциальная скорость представляется в виде:

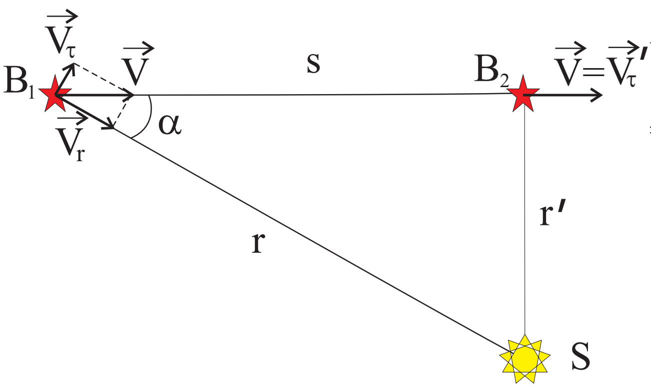

Рис. 7. К определению взаимного расположения Солнца и звезды Барнарда.

$$V_\tau = \mu\, r = \frac{10.358''}{3.156 \cdot 10^7\,c} \times \frac{5.96 \times 9.46 \cdot 10^{12}\,\text{км}}{206265''/\text{рад}} = \\ = 89.8\,\text{км/с}. \tag{30}$$

здесь учтено что 1 год $= 3.156 \cdot 10^7$ с, 1 рад$= 206265''$, 1 св.г. $= 9.46 \cdot 10^{12}$ км. Тогда $V = 139.5$ км/с. Пройденный путь s можно определить из прямоугольного треугольника B_1B_2S:

$$s = r\,\cos\alpha = r\,(V_r/V) = 4.56 \text{ св. л.}$$

В тоге время $t_0 = 9798 \approx 9800$ лет.

В момент наибольшего сближения с Солнцем:

$$V'_\tau = V, \;\; V'_r = 0.$$

Расстояние до звезды есть

$$r' = r\sin\alpha = r\left(\frac{V_\tau}{V}\right) = 3.84 \text{ св.г.}$$

Собственное движение μ':

$$\mu' = \frac{V'_\tau}{r'} = \frac{139.5\,\text{км/год} \cdot 3.156 \cdot 10^7}{3.84 \times 9.46 \cdot 10^{12}\,\text{км}} 206265''/\text{рад} = 24.998''/\text{год}.$$

Параллакс легко представить через r' при условии, что последний выражен в пк:

$$\pi' = \frac{1}{r'} = \frac{3.26 \text{ св.г./пк}}{3.84 \text{ св.г.}} = 0.849''.$$

Воспользуемся формулой Погсона и законом обратных квадратов для определения звездной величины m':

$$m_V - m'_V = -2.512\lg\left(\frac{E}{E'}\right), \;\; \frac{E}{E'} = \frac{r'^2}{r^2}, \;\Rightarrow$$

$$m'_V = m_V - 5\lg\left(\frac{r}{r'}\right) = 8.62^m. \tag{31}$$

Данная звезда не будет видна невооруженным глазом.

Ответ: $t_0 \approx 9800$ лет, $V'_\tau = 139.5$ км/с, $V'_r = 0$ км/с, $\mu' = 24.998''$/год, $r' = 3.84$ св.г., $\pi' = 0.849''$, $m'_V = 8.62^m$; данная звезда не будет видна невооруженным глазом. ($\$_{\max} = 12$ баллов).

Задача № 15. «Угловые масштабы петли попятного движения»

Условие. Как известно, все планеты Солнечной системы при наблюдении с Земли совершают как прямое так и попятное движение относительно звезд. Объясните причину попятного движения. Вычислите угловой диаметр петли попятного движения в случае 1) внутренней и 2) внешней планеты в приближении круговых орбит. Определите численные значения искомой величины для всех классических планет и Плутона. (13 баллов).

Решение:

Как известно, гелиоцентрическая угловая и линейная скорости планеты, движущейся по круговой орбите вокруг Солнца, определяются выражениями вида:

$$\omega = \sqrt{\frac{G\mathfrak{M}_\odot}{r_P^3}}, \quad V = \sqrt{\frac{G\mathfrak{M}_\odot}{r_P}}. \qquad (32)$$

здесь r_P – радиус орбиты планеты. Очевидно, что скорость нижних планет больше, а верхних – меньше скорости Земли $V_\oplus$ ($\omega_\oplus$). ***Суть объяснения прямых и попятных движений планет заключается в сопоставлении величин и направлений орбитальных линейных скоростей планет и Земли***.

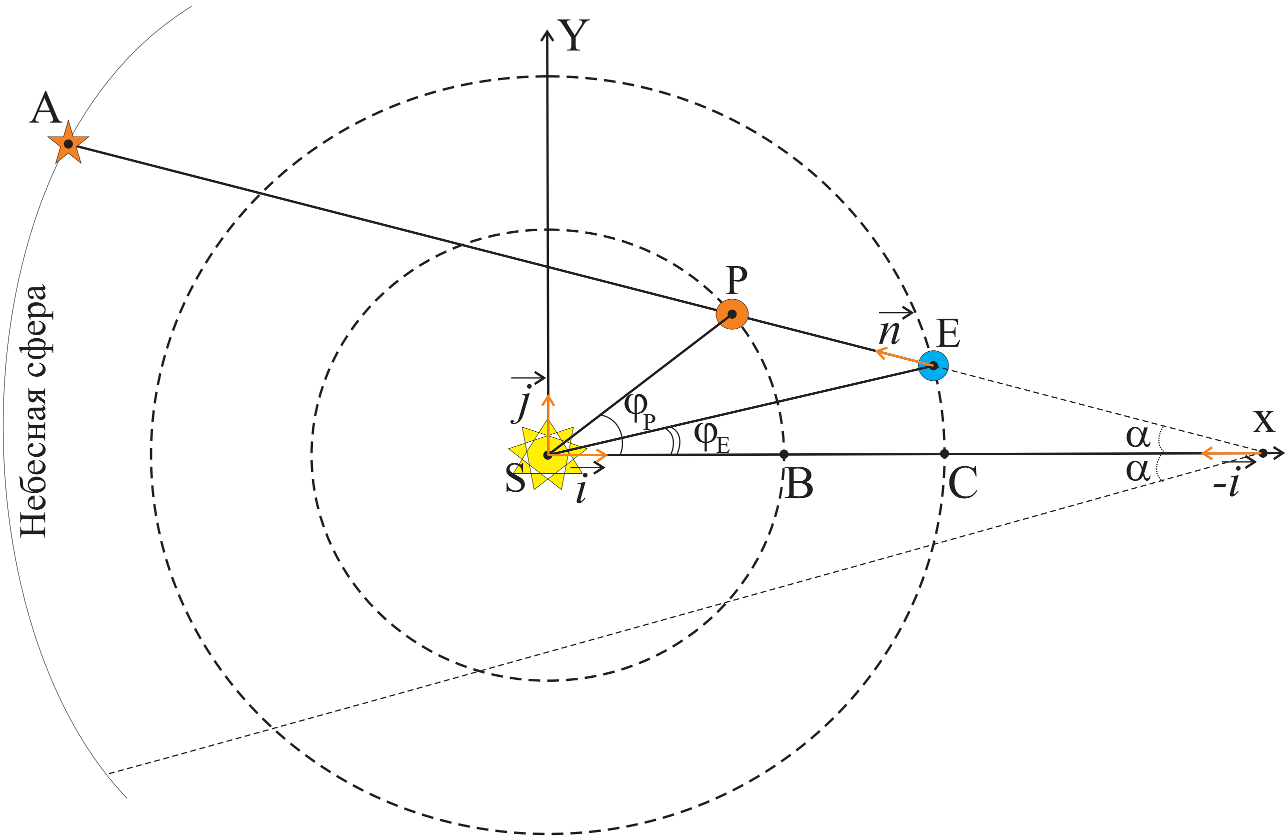

Рис. 8. К определению петли попятного движения нижней планеты.

Рассмотрим ситуацию образования петли попятного движения в случае нижней планеты. Пусть в начальный момент времени нижняя планета находилась в нижнем соединении с Землей в точке B (при этом Земля находилась в точке C, см. рис. 8). Выберем декартову систему координат так как показано на рис. 8. Свет от планеты к Земле идет по отрезку PE, при этом планета проецируется в точку A на небесной сфере для земного наблюдателя. За время t (поскольку $\omega_P > \omega_\oplus$) нижняя планета повернется относительно оси SX на угол $\varphi_P = \omega_P\, t > \varphi_E = \omega_\oplus\, t$. При этом луч AE повернется по часовой стрелке (с востока на запад), определяя видимое попятное движение планеты и отклоняясь от оси SX на угол α. Однако, с увеличением t нижняя планета все больше удаляется от Земли и в какой-то момент угол α начнет уменьшаться, при этом начнется прямое движение планеты. Т.о. максимальное значение угла α определяет половину углового диаметра петли попятного движения, т.е.

$$d'' = 2\,\alpha_{\max}. \tag{33}$$

Определим угол α. Для этого учтем, что его можно представить через скалярное произведение двух единичных векторов $-\vec{i}$, $\vec{n}$ (см. рис. 8):

$$\cos\alpha = (-\vec{i}\cdot\vec{n}), \;\Rightarrow\; \alpha = \arccos\left(\vec{i}\cdot\vec{n}\right). \tag{34}$$

Определим координаты планет в декартовых координатах и затем перейдем к полярным координатам:

Декартовы коор-ты	Полярные коор-ты
(x_E, y_E),	$(r_\oplus\cos\omega_\oplus t, r_\oplus\sin\omega_\oplus t)$,
(x_P, y_P),	$(r_P\cos\omega_P t, r_P\sin\omega_P t)$.

Тогда координаты вектора $\overrightarrow{PE}$ есть

$$\overrightarrow{PE} = \left((r_P\cos\omega_P t - r_\oplus\cos\omega_\oplus t), (r_P\sin\omega_P t - r_\oplus\sin\omega_\oplus t)\right),$$

при этом единичный орт $\vec{n} = \overrightarrow{PE}/|\overrightarrow{PE}|$ или

$$\overrightarrow{n} = \left(\frac{(r_P\cos\omega_P t - r_\oplus\cos\omega_\oplus t)}{\sqrt{r_P^2 + r_\oplus^2 - 2r_P\,r_\oplus\cos(\omega_P-\omega_\oplus)t}}, \frac{(r_P\sin\omega_P t - r_\oplus\sin\omega_\oplus t)}{\sqrt{r_P^2 + r_\oplus^2 - 2r_P\,r_\oplus\cos(\omega_P-\omega_\oplus)t}}\right).$$

В итоге $\cos\alpha$ представляется в виде:

$$\cos\alpha = \frac{(r_\oplus\cos\omega_\oplus t - r_P\cos\omega_P t)}{\sqrt{r_P^2 + r_\oplus^2 - 2r_P\,r_\oplus\cos(\omega_P-\omega_\oplus)t}}. \tag{35}$$

Т.о. мы получили $\cos\alpha$ как функцию времени t. Очевидно, что если $\alpha = \alpha_{\max}$, то $\cos\alpha$ принимает минимальное значение. Следовательно, *необходимо решить задачу на экстремум для данной функции*. Вычислим производную $(\cos\alpha)'_t$ и приравняем ее к нулю:

$$(\cos\alpha)'_t = \frac{1}{(r_P^2 + r_\oplus^2 - 2r_P\,r_\oplus\cos(\omega_P-\omega_\oplus)t)^{3/2}}\left[(\omega_P\,r_P\sin\omega_P t - \omega_\oplus\,r_\oplus\sin\omega_\oplus t)(r_P^2 + r_\oplus^2 - 2r_P\,r_\oplus\times\right.$$

$$\left.\times\cos(\omega_P-\omega_\oplus)t) - (r_\oplus\cos\omega_\oplus t - r_P\cos\omega_P t)r_P\,r_\oplus(\omega_P-\omega_\oplus)\sin(\omega_P-\omega_\oplus)t\right] = 0. \tag{36}$$

Дробь равна нулю, если числитель равен нулю, а знаменатель при этом отличен. Числитель последней дроби, после алгебраических преобразований, можно представить в виде:

$$\left(r_P^2\omega_P + r_\oplus^2\omega_\oplus - r_P\,r_\oplus\,(\omega_P+\omega_\oplus)\cos(\omega_P-\omega_\oplus)t\right)(r_P\sin\omega_P t - r_\oplus\sin\omega_\oplus t) = 0,$$

откуда следует, что

$$\left(r_P^2\omega_P + r_\oplus^2\omega_\oplus - r_P\,r_\oplus\,(\omega_P+\omega_\oplus)\cos(\omega_P-\omega_\oplus)t_1^{(0)}\right) = 0, \;\Rightarrow$$

$$t_1^{(0)} = \frac{1}{(\omega_P-\omega_\oplus)}\arccos\left(\frac{r_P^2\omega_P + r_\oplus^2\omega_\oplus}{r_P\,r_\oplus\,(\omega_P+\omega_\oplus)}\right). \tag{37}$$

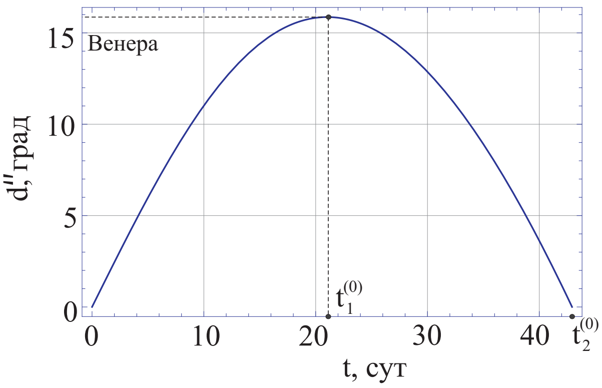

Рис. 9. К определению точки максимума $t_1^{(0)}$ и минимума $t_2^{(0)}$.

Второй корень должен $t_2^{(0)}$ удовлетворять трансцендентному уравнению вида:

$$r_P \sin \omega_P t_2^{(0)} = r_\oplus \sin \omega_\oplus t_2^{(0)}.$$

Предварительное численное моделирование на примере Венеры дает нам значения $t_1^{(0)} = 21.03$ сут, $t_2^{(0)} = 42.93$ сут. На рис. 9 представлен график зависимости $d''(t)$. Из рисунка очевидно, что $t_1^{(0)}$ отвечает максимуму угла 2α, а корень $t_2^{(0)}$ минимуму. Т.о. окончательно имеем

$$d'' = 2 \arccos \left[\frac{(r_\oplus \cos \omega_\oplus t_1^{(0)} - r_P \cos \omega_P t_1^{(0)})}{\sqrt{r_P^2 + r_\oplus^2 - 2 r_P r_\oplus \cos(\omega_P - \omega_\oplus) t_1^{(0)}}} \right]. \tag{38}$$

В случае внешней планеты необходимо провести в результатах (37), (38) взаимную замену $r_P \leftrightarrow r_\oplus$, $\omega_P \leftrightarrow \omega_\oplus$. В таблице 1 представлены результаты расчетов для всех классических планет и Плутона. Здесь $2t_1^{(0)}$ определяет время попятного движения планеты.

Таблица 1

Объект	r, а.е.	T_P, сут	ω_P, рад/сут	$2t_1^{(0)}$, сут	d'', град
Меркурий	0.387	87.658	0.072	22.87	13.91
Венера	0.723	224.614	0.028	42.15	16.18
Марс	1.523	687.091	0.0091	72.76	15.97
Юпитер	5.204	4338.16	0.0014	120.65	9.95
Сатурн	9.582	10824.9	0.00058	137.67	6.76
Уран	19.229	30680.3	0.00020	151.72	4.02
Нептун	30.104	60075.5	0.00010	158.399	2.79
Плутон	39.481	90612.9	0.000069	161.791	2.22

Основные результаты расчетов задачи.

($\$_{\max} = 13$ баллов).

Задача № 16. «Мысленный эксперимент и светила земного небосвода»

Условие. Как известно, одной из составляющих межзвездной среды нашей Галактики являются диффузные темные пылевые туманности. При движении в теле галактики Солнечная система, в принципе, может попасть в одно из таких гигантских облаков. Проведем мысленный эксперимент: допустим, что эта ситуация имеет место, а пылевое облако является очень плотным и однородным. В результате чего полная Луна в небе Земли стала слабее на 0.4^m. Назовите все небесные объекты, которые будут видны на небосводе Земли невооруженным глазом. Каким (примерно) будет их блеск? (14 баллов).

Решение:

При постоянной концентрации частиц пыли в единице объема ослабление света источника (в звездных величинах) пропорционально длине пути от источника света до наблюдателя. Это утверждение легко доказать, используя формулу Погсона и закон Бугера-Ламберта (см. задачу 11).

В случае наблюдения Луны источником света является Солнце. Расстояние между Землей и Луной пренебрежимо мало по сравнению с расстоянием от обоих тел до Солнца, поэтому длина пути, пройденного излучением, составляет 1 а.е., а поглощение света в Солнечной системе и окрестностях – 0.4^m/а.е.

Для того, чтобы узнать, насколько изменился блеск других светил, нужно рассчитать длину пути света для каждого из них. В случае Солнца мы вновь имеем 1 а.е., и дневное светило ослабит блеск на 0.4^m, оставаясь очень ярким (26.3^m). Визуально такое "потемнение" Солнца не было бы заметным, но оно вызвало бы существенные климатические изменения на Земле.

Блеск планет рассчитаем для случая их наибольшей элонгации (внутренние планеты) и противостояния (внешние планеты). Если обозначить радиус орбиты через a, то длина пути в первом и втором случаях составит

$$\ell_1 = a + \sqrt{a_{\oplus}^2 - a^2}, \;\; \ell_2 = 2a - a_{\oplus} \tag{39}$$

здесь $a_{\oplus} = 1$ а.е. – радиус орбиты Земли. Звездная величина светил станет равной

$$m = m_0 + 0.4 \cdot \ell.$$

Здесь m_0 – блеск светила без ослабления пылью. Рассчитаем эти величины для ярких больших планет и запишем результаты в таблицу 2:

Таблица 2

Объект	ℓ, а.е.	m_0, зв. вел.	m, зв. вел.
Солнце	1	-26.7	-26.3
Луна	1	-12.7	-12.5
Меркурий	1.3	-0.1	0.4
Венера	1.4	-4.4	-3.84
Марс	2.0	-2.0	-1.2
Юпитер	9.4	-2.7	1.0
Сатурн	18.0	0.4	7.84

Звездные величины тел Солнечной системы до и после попадания в пылевое облако.

Получается, что яркие планеты останутся видимыми на небе (за исключением Сатурна), но если Меркурий, Венера и Марс практически сохранят свой блеск, то Юпитер будет выглядеть заметно потускневшим, а Сатурн вообще перестанет быть видимым невооруженным глазом.

Очевидно, что более далекие планеты видны не будут, так как Уран даже при отсутствии пыли едва заметен глазом, а пыль ослабила бы его блеск более чем на 14 звездных величин. Не будет виден и ярчайший из астероидов Веста, блеск которого ослабнет на 2^m. Но самое главное – с неба исчезнут все далекие звезды и объекты вне Солнечной системы, так как уже на расстоянии в 20 а.е. поглощение достигнет 8^m, что достаточно для исчезновения ярчайшей звезды ночного неба Сириуса.

Получается, что таблица содержит все объекты, которые останутся видимыми в небе Земли (за исключением Сатурна). К ним могут присоединяться только метеоры и (изредка) яркие кометы, при условии, что они окажутся на небольшом расстоянии от Солнца и Земли. На темном и совершенно пустом ночном небе будут видны только Луна и 4 планеты, одна из которых будет неяркой.

Ответ: На темном и совершенно пустом ночном небе будут видны только Луна и 4 планеты (Меркурий, Венера, Марс, Юпитер). К ним могут присоединяться только метеоры и (изредка) яркие кометы, при условии, что они окажутся на небольшом расстоянии от Солнца и Земли. ($\$_{\max} = 14$ баллов).

Задача № 17. «Галактика M100 и сверхновая SN1979C»

Условие. Опираясь на данные наблюдений для галактики M100 и результаты расчетов задачи № 13, определите угловой и линейный масштабы фотографии, оцените расстояние от центра галактики до сверхновой. Полагая, что звезда находится на краю галактики, в ее диске и движется по орбите, близкой к круговой, оцените ее угловую (рад/год) и линейную скорость (км/с), период обращения (год) и ускорение свободного падения (м/с^2). Предполагается, что полная масса галактики составляет $\mathfrak{M}_G = 6 \cdot 10^{10} \cdot \mathfrak{M}_{\odot}$. Полагая, что галактика на фотографии расположена "плашмя", а форма ее видимой границы близка к форме эллипса, оцените ее среднюю поверхностную массовую плотность (в массах Солнца на квадратный парсек). (14 баллов).

Дано:
$\mathfrak{M}_G = 6 \cdot 10^{10} \cdot \mathfrak{M}_\odot$,
$V_r = -106.8$ км/с,
$r = 5.96$ св. лет,
$m_V = 9.57^m$.
Найти:
μ, μ'', r_*, σ – ?
ω_*, V_*, T_*, a_* – ?

Решение:

Угловой масштаб фотографии (μ'') – параметр, определяемый отношением углового размера какого-либо объекта (a'', b''), представленного на фотографии к его линейному размеру (ℓ_a, ℓ_b), определяемому линейкой (или каким-либо другим измерительным прибором) по фотографии, т.е.

$$\mu''_1 = \frac{a''}{\ell_a} = \frac{7.4'}{140\,\text{мм}} = 3.17''/\text{мм}, \;\; \mu''_2 = \frac{b''}{\ell_b} = \frac{6.3'}{120\,\text{мм}} = 3.15''/\text{мм}. \qquad (40)$$

здесь $\ell_a = 140$ мм, $\ell_a = 120$ мм – линейные размеры большой и малой оси соответственно, измеренные на стандартной распечатке страницы заданий с фотографией (ваш результат может несколько отличаться от указанного из-за различных форматов распечатки принтеров). В итоге

$$\mu'' = \frac{1}{2}\left(\mu''_1 + \mu''_2\right) = 3.16''/\text{мм}.$$

Аналогично определяется линейный масштаб фотографии:

$$\mu_1 = \frac{a}{\ell_a} = \frac{1.18 \cdot 10^5\,\text{св.лет}}{140\,\text{мм}} = 843\ \text{св.г./мм}, \;\; \mu_2 = \frac{b}{\ell_b} = \frac{1.01 \cdot 10^5\,\text{св.лет}}{120\,\text{мм}} = 842\ \text{св.г./мм}. \qquad (41)$$

$$\mu = \frac{1}{2}\left(\mu_1 + \mu_2\right) = 842\ \text{св.г./мм}.$$

Далее по распечатке фотографии определяем расстояние от центра галактики до сверхновой – $\ell_* = 57$ мм, тогда расстояние в св.г. есть $r_* = \mu \cdot \ell_* = 47994$ св.г. Искомые кинематические параметры можно представить в виде (первый результат – следствие третьего закона Кеплера):

$$\omega_* = \frac{\sqrt{G \cdot \mathfrak{M}_G}}{{r_*}^{3/2}} = \frac{\sqrt{6.673 \cdot 10^{-11}\,\text{Н}{\cdot}\text{м}^2/\text{кг}^2 \cdot 6 \cdot 10^{10} \cdot 1.989 \cdot 10^{30}\text{кг}}}{(47994 \cdot 9.46 \cdot 10^{15}\text{м})^{3/2}} = 9.21 \cdot 10^{-9}\,\text{рад/год}. \qquad (42)$$

$$T_* = \frac{2\pi}{\omega_*} = 6.83 \cdot 10^8\,\text{лет}. \qquad (43)$$

$$V_* = \omega_* \cdot r_* = 47994 \cdot 9.46 \cdot 10^{12}\,\text{км} \cdot \frac{9.21 \cdot 10^{-9}\,\text{рад}}{3.156 \cdot 10^7\ c} = 132\ \text{км/с}. \qquad (44)$$

$$a_* = \frac{V_*^2}{r_*} = 3.84 \cdot 10^{-11}\ \text{м/с}^2. \qquad (45)$$

Средняя поверхностная массовая плотность галактики есть

$$\sigma = \frac{\mathfrak{M}_G}{S} = \frac{\mathfrak{M}_G}{\pi\,a\,b} = \frac{6 \cdot 10^{10}\,\mathfrak{M}_\odot}{\pi\,36196 \cdot 30982\,\text{пк}^2} = 17.0\frac{\mathfrak{M}_\odot}{\text{пк}^2} \qquad (46)$$

здесь мы учли, что площадь эллипса представляется в виде $S = \pi\,a\,b$.

Ответ: $\mu'' = 3.16''/\text{мм}$, $\mu = 842$ св.г./мм, $\omega_* = \sqrt{G \cdot \mathfrak{M}_G}/{r_*}^{3/2} = 9.21 \cdot 10^{-9}$ рад/год, $T_* = 6.83 \cdot 10^8$ лет, $V_* = 132$ км/с, $a_* = V_*^2/r_* = 3.84 \cdot 10^{-11}$ м/с^2, $\sigma = \mathfrak{M}_G/(\pi\,a\,b) = 17.0$ ($\mathfrak{M}_\odot/\text{пк}^2$). ($\$_{\max} = 14$ баллов).

Задача № 18. «Энергия вспышки Новой Дельфина 2013»

Условие. Опираясь на данные наблюдений Новой Дельфина 2013, представленные в задачах № 7-8, и основные результаты этих задач, определите законы изменения светимости звезды ($L_*(t)$) на интервалах времени (14-08-2013 года, $UT_0 = 00^h00^m$; 15-08-2013 года, $UT_1 = 00^h00^m$), (15-08-2013 года, $UT_1 = 00^h00^m$; 16-08-2013 года, $UT_2 =^h 00^m$), (16-08-2013 года, $UT_2 =^h 00^m$;окончание вспышки). Используя полученные зависимости, оцените полное количество энергии (E_{tot}), которое излучила звезда за все время вспышки. Оцените 1) массу звездного вещества, которое было превращено в лучистую энергию во время вспышки и 2) время, которое потребовалось бы Солнцу, чтобы излучить энергию E_{tot}. (15 баллов).

Решение:

Прежде всего определим законы изменения блеска новой на первом и втором временном интервале. Согласно кривой блеска (см. рис. 5), данные зависимости являются линейными и могут быть записаны в виде:

$$m^{(1)}(t) = m_0 - v_m^{(1)} t, \text{ где } v_m^{(1)} = \frac{m_0 - m_1}{1\,\text{сут}} = 10.3^m/\text{сут}, \tag{47}$$

$$m^{(2)}(t) = m_1 - v_m^{(2)} t, \text{ где } v_m^{(2)} = \frac{m_1 - m_2}{1.5\,\text{сут}} = 1.667^m/\text{сут}. \tag{48}$$

Далее воспользуемся формулой Погсона для двух моментов времени:

$$\frac{L^{(1)}(t)}{L_{\min}} = \exp\left(-0.4(m^{(1)}(t) - m_0)\right), \;\Rightarrow\; L^{(1)}(t) = L_{\min}\exp\left(0.4\, v_m^{(1)}\, t\right), \tag{49}$$

$$\frac{L^{(2)}(t)}{L_{\max}} = \exp\left(-0.4(m^{(2)}(t) - m_2)\right), \;\Rightarrow\; L^{(2)}(t) = L_{\max}\exp\left(0.4 v_m^{(2)} t + 0.4(m_2 - m_1)\right), \tag{50}$$

$$\frac{L^{(3)}(t)}{L_{\max}} = \exp\left(-0.4(m(t) - m_2)\right), \;\Rightarrow\; L^{(3)}(t) = L_{\max}\exp\left(-0.4\, v_m\, t\right), \tag{51}$$

здесь $m(t)$ определяется выражением (12). Согласно определению светимости

$$L = \frac{dE}{dt}, \;\Rightarrow\; dE = L \cdot dt.$$

Проинтегрируем последнее уравнение

$$\int_{E_1}^{E_2} dE = \int_{t_1}^{t_2} L(t)dt, \;\Rightarrow\; \Delta E = \int_{t_1}^{t_2} L(t)dt. \tag{52}$$

здесь ΔE – количество энергии, излученное звездой на интервале (t_1, t_2). Следовательно, полную энергию, излученную звездой можно представить в виде:

$$E_{\text{tot}} = \int_{t_0}^{t_1} L^{(1)}(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} L^{(2)}(t)dt + \int_{t_2}^{t_f} L^{(3)}(t)dt. \tag{53}$$

Вычислим каждый интеграл отдельно:

$$\int_{t_0}^{t_1} L^{(1)}(t)dt = L_{\min}\int_0^1 \exp\left(0.4\, v_m^{(1)}\, t\right)dt = \frac{L_{\min}}{0.4\, v_m^{(1)}}\left(\exp\left(0.4\, v_m^{(1)}\right) - 1\right) = 1.270 \cdot 10^6 (c) \cdot L_{\min},$$

$$\int_{t_0}^{t_1} L^{(2)}(t)dt = L_{\max}\exp\left(0.4(m_2 - m_1)\right)\int_0^{1.5} \exp\left(0.4\, v_m^{(2)}\, t\right)dt = \frac{L_{\max}}{0.4\, v_m^{(2)}}\exp\left(0.4(m_2 - m_1)\right) \times$$

$$\times\left(\exp\left(0.6\, v_m^{(2)}\right) - 1\right) = 8.193 \cdot 10^4 (c) \cdot L_{\max}.$$

$$\int_{t_2}^{t_f} L^{(3)}(t)dt = L_{\max}\int_0^{75.3} \exp\left(-0.4\, v_m\, t\right)dt = \frac{L_{\max}}{0.4\, v_m}\left(1 - \exp\left(-30.12\, v_m\right)\right) = 1.263 \cdot 10^6 (c) \cdot L_{\max},$$

Т.о. полная энергия представляется в виде:

$$E_{\text{tot}} = 1.270 \cdot 10^6 (c) \cdot L_{\min} + 8.193 \cdot 10^4 (c) \cdot L_{\max} + 1.263 \cdot 10^6 (c) \cdot L_{\max} = \{9.67 \cdot 10^{37}, 2.43 \cdot 10^{38}\}\,\text{Дж}.$$

Два значения полной энергии отвечают двум возможным расстояниям до звезды, представленным в задаче 8. Соответствующие значения массы определяются формулой Эйнштейна:

$$\mathfrak{M}_* = \frac{E_{\rm tot}}{c^2} = \{1.07\cdot 10^{21}, 2.70\cdot 10^{21}\}\,\text{кг}. \tag{54}$$

Полученные значения массы сопоставимы с массами крупных спутников планет Солнечной системы. Время, которое потребовалось бы Солнцу, чтобы излучить энергию E_{tot} есть

$$t_\odot = \frac{E_{tot}}{L_\odot} = \{7966, 20019\}\,\text{лет}. \tag{55}$$

Ответ: $L^{(1)}(t) = L_{\min}\exp\left(0.4\,v_m^{(1)}\,t\right)$, $L^{(2)}(t) = L_{\max}\exp\left(0.4v_m^{(2)}t + 0.4(m_2 - m_1)\right)$, $L^{(3)}(t) = L_{\max}\exp\left(-0.4\,v_m\,t\right)$, $E_{\rm tot} = \{9.67\cdot 10^{37}, 2.43\cdot 10^{38}\}$ Дж, $\mathfrak{M}_* = \{1.07\cdot 10^{21}, 2.70\cdot 10^{21}\}$ кг, $t_\odot = \{7966, 20019\}$ лет. ($\$_{\max} = 15$ баллов).